

# ELABORAREA DE MODELE DE PREDICȚIE PRIVIND COMPORTAMENTUL ORGANISMELOR INTERNATIONALE ÎN CEEA CE PRIVEȘTE RELAȚIILE CU ROMÂNIA

*Prof. univ. dr. Stelian Stancu, Prof. univ. dr. Dumitru Marin, Prof. univ. dr. Nora Chiriță, Lect. univ. dr. Roxana Ciumara, Asist. univ. drd. Amaria Aldea*

Lucrarea este structurata pe 5 capitole, in vederea acoperirii problematicii cuprinsa in cele doua activitati, și anume: Activitatea A1.1. "Elaborarea de modele de predicție privind comportamentul agenților economici" evidentiata în capitolele 1, 2 și 3, respectiv Activitatea A1.2. "Modele de predicție privind comportamentul organismelor internationale in ceea ce priveste relațiile cu România" evidentiata in capitolele 4 și 5.

In acest context, cele 5 capitole sunt: capitolul 1 "Aplicarea teoriei recunoasterii formelor (rețelelor neuronale) in studiul comportamentului agentilor economici", capitolul 2 "Modele si algoritmi de predictie in cazul transformarilor liniare", capitolul 3 "Modele haotice de predictie a comportamen-tului agentilor economici", capitolul 4 "Modele de trend pentru estimarea ciclurilor economice", si respectiv ultimul capitol, cel de-al 5-lea " Analiza econometrică a agregării în cazul modelelor de prognoză liniară la nivel macroeconomic "

In capitolul 1 "Aplicarea teoriei recunoasterii formelor (rețelelor neuronale) in studiul comportamentului agentilor economici", se desprinde faptul ca recunoasterea automata, descrierea, clasificarea si categorizarea formelor (structurilor) sunt probleme intr-o varietate de domenii stintifice si tehnice cum ar fi economie, biologie, psihologice, madecina, marketing, IT, inteligenta artificiala si detectarea la distanta. Dar ce este o structura? Wantanbe defineste structura "ca fiind opusul haosului, este o entitate, vag determinata careia i s-ar putea da o denumire". De exemplu, o structura ar putea fi imaginea unei amprente, un cuvânt scris de mana, fata unui om, sau un semnal sonor. Dandu-se o structura, pentru recunoasterea/ clasificarea ei este necesar:

- 1) Catalogarea supravegheata in cadrul careia structura este identificata ca fiind membru a unei anumite categorii;
- 2) catalogarea nesupravegheata in cadrul careia structura este atasata la o alta clasa(inclusa intr-o categorie necunoscuta).

De mentionat ca problema recunoasterii aici este pusa ca fiind activitatea de clasificare sau categorizare, unde clasele sunt definite fie de administratorul sistemului (in cadrul catalogarii supravegheate) sau sunt invatate pe baza similaritatii structurile (in cadrul catalogarii nesupravegheate).

O caracteristica des intalnita a acestor aplicatii este numarul mare de caracteristici(specificatii) disponibile (de obicei de ordinul miilor) nu sunt de obicei implementate de catre experti, in schimb acestea trebuie extrase si optimizate din procedeele de analiza a datelor.

In multe din aplicatiile nou aparute, s-a observat ca o clasificare unica nu este optima si ca este necesara folosirea mai multor metode de clasificare si analiza. In consecinta, combinarea mai multor metode de analiza si clasificare este un lucru obisnuit in recunoasterea formelor (structurilor).

Crearea unui sistem de recunoastere a formelor (structurilor) necesita urmatoarele trei aspecte:

- a) culegerea si procesarea informatiilor;
- b) reprezentarea informatiilor;
- c) procesul decizional

Caracteristicile problemei impun alegerea senzorilor, metodei de procesare, schemei de reprezentare si a modelului decizional. Este in general acceptat ca o problema de recunoastere bine definita si suficient conturata (variatii mici intre categorii si variatii mari intre categorii) va conduce la o reprezentare a formelor (structurilor) compacta si la o strategie decizionala simpla. Invatarea dintr-un grup de exemple este caracteristica necesara si importanta a majoritatii sistemelor de recunoastere a formelor (structurilor). Cele mai bune patru metode de analiza a recunoasterii formelor (structurilor) sunt:

- a) compararea sabloanelor;
- b) clasificarea statistica;
- c) compararea sintactica sau structurala;
- d) rețele neuronale.

Aceste modele nu sunt neaparat independente si cateodata aceeasi metoda de recunoastere a formelor (structurilor) are interpretari diferite. Exista incercari de a dezvolta un model hibrid care sa permita folosirea mai multor modele.

In capitolul 2 “Modele si algoritmi de predictie in cazul transformarilor liniare” atentia va fi concentrata pe problema reprezentarii variabilelor multidimensionale cu valori continue.

O problema principala in cercetarea retelei neuronale, in statistica si in procesarea punctuala este gasirea unei modalitati adecvate de reprezentare a datelor cu mijloace de transformare adecvate. Este important pentru analiza subsecventiala a datelor, chiar daca este model de reconstituire, compresie a datelor, reducerea zgomotului, vizualizare sau orice altceva, ca data sa fie reprezentata intr-o maniera ce faciliteaza analiza.

Fie pentru aceasta  $\mathbf{x}$  o variabila  $m$ -dimensionala aleasa la intamplare; problema este acum de a gasi o functie  $\mathbf{f}$  astfel incat transformarea  $n$ -dimensionala  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$  definita de

$$\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

sa aiba proprietatile dorite. (nota: vom folosi in acest capitol unele notatii pentru variabilele aleatoare si rezultatele lor: conextul in care vor fi folosite ar trebui sa faca clara distinctia.) In majoritatea cazurilor este gasita ca o transformare liniara a variabilelor observate, de exemplu

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad (1.2)$$

unde  $\mathbf{W}$  este o matrice ce va fi determinata. Transformarea liniara face problema mai simpla din punct de vedere conceptual, facilitand interpretarea rezultatelor. Astfel vom trata numai transformarea *liniara* in acest capitol. Multe din metodele descrise in acest capitol pot fi extinse in cazul neliniar.

Recent, o anume metoda de gasire a transformarii liniare, numita **analiza componentelor independente (ACI)**, a castigat atentia lumii. Dupa cum ii spune numele, scopul principal este de a gasi o transformare in care componentele  $s_i$  sunt cat se poate de independente din punct de vedere statistic.

ACI poate fi aplicata, de exemplu, in cazul in care valorile observate ale lui  $\mathbf{x}$  corespund unei realizari a unui semnal de timp discret  $m$ -dimensional  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots$ . Atunci componentele  $s_i(t)$  sunt numite semnale sursa, care sunt de obicei, semnale sau zgomot sursa original. Adesea aceste surse sunt independente statistic una de cealalta, si chiar daca semnalul poate fi restabilit din mixturi liniare  $x_i$  gasind o transformare in care semnalele transformate sunt cat se poate de independente, ca in cazul ACI.

O alta aplicatie promitatoare este extragerea caracteristicilor, in care  $s_i$  este coeficientul celei de-a  $i$ -a caracteristica in vectorul observat  $\mathbf{x}$ . Folosirea ACI pentru extragerea caracteristicilor este motivata de rezultate in stiinta neuronale care sugereaza ca un principiu similar al reducerii redundantei explica cateva aspecte ale procesarii timpurii ale datelor senzoriale de catre creier. ACI are de asemenea aplicatii in analiza cercetarii datelor in acelasi sens ca si metoda inrudita a urmaririi proiectiei.

De asemenea, in acest capitol, sunt prezentate teoria si metodele ACI si metodele clasice de reprezentare, se arata conexiunile cu metoda clasica ca si cateva dintre aplicatiile acesteia iar in final sunt prezentati algoritmi corespunzatori.

In capitolul 3 “Modele haotice de predictie a comportamentului agentilor economici” introducem o abordare bazata pe model pentru a estima evolutia miscarilor haotice utilizand **orbitele periodice instabile (OPI)** in haos. Metoda a fost dezvoltata bazandu-se pe urmatoarea natura a haosului:

O miscare haotica initiala poate fi brusc supusa de o orbita periodica instabila (OPI), si pare sa fie un model periodic similar cu cel al modelului OPI. O astfel de miscare similara cu cea periodica poate persista pentru un timp si intr-un final va reveni la comportamentul nereglat corespunzator naturii instabile a OPI.

Intamplarea multor tipuri de miscari similare cu cele periodice intr-o conduita haotica evolutiva este supusa existentei unui numar de orbite periodice instabile (OPI) care tin de haos.

O traiectorie haotica poate simula modelul oricarei OPI atata timp cat se afla in apropierea OPI. Astfel, modelele OPI se comporta ca puncte de referinta ce pot fi folosite la estimarea miscarilor ciclice in evolutii haotice.

Recunoasterea modelelor ciclice si estimarea dinamicilor complexe pot duce la multe aplicatii, cum ar fi detectarea ciclului de afaceri, schimbarile sezoniere in meteorologie si variatiile populatiei in ecologie.

Orbitele periodice instabile(OPI) sunt modele periodice intrinseci aflate intr-un atractor haotic si pot fi detectate din date haotice. Consideram un sistem  $n$ -dimensional (sistem continuu/discret) care poate fi exprimat prin relatia:

$$x_{i+1} = f(x_i), \quad x \in R^n \quad (3.1)$$

unde  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  este un punct de planificare la pasul  $i$  si un vector de dimensiune  $n \times 1$ , comportandu-se intr-o maniera haotica.

Cand  $x_{i+m}$  evolueaza aproape de  $x_i$  in  $m$  pasi, aceasta presupune ca aici sa existe o OPI de perioada  $m$  in apropiere de cele doua puncte de planificare. Calea OPI este un cerc strans in spatiul starilor( spatiu fazic). Pentru a localiza precis aceasta orbita periodica  $x^*$ , consideram o relatie reziduala:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= F(x) - x, \\ F(x) &= f^m(x),\end{aligned}\tag{3.2}$$

unde  $F$  reprezinta iteratia  $m$  a lui  $f$ . O orbita  $x^*$  de perioada  $m$  a relatiei  $f$  corespunde uneia dintre solutiile relatiei reziduale

$$\Phi(x) = 0\tag{3.3}$$

astfel incat orbita periodica  $x^*$  satisface relatia  $x^* = f^m(x^*)$ .

Scopul aici este de a gasi o solutie  $x^*$  cu o perioada de  $m$  iteratii pentru relatia reziduala (3.3). Presupunem ca avem un  $x_k$  initial luat la intamplare al solutiei  $x^*$ . Punctul  $x_k$  se afla intr-o vecinatate a orbitei periodice  $x^*$  a carei locatie precisa nu se cunoaste. Aceasta estimare initiala  $x_k$  a solutiei  $x^*$  poate fi imbunatatita folosind

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - [d\Phi(x_k)/dx]^{-1} \cdot \Phi(x_k)$$

care este obtinuta conform algoritmului lui Newton de gasire a radacinii. Obtinem:

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - [D - I]^{-1}(F(x_k) - x_k),\tag{3.4}$$

unde  $I$  este o matrice unitate de dimensiune  $n \times n$ , iar  $D$  este matricea Jacobiana a functiei  $F(x)$ . Pentru a aplica ecuatia (3.4) fara cunostinte explicite despre dinamicile unui sistem, o forma intarziata poate fi obtinuta astfel:

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - [D - I]^{-1} D(x_k - x_{k-1}),\tag{3.5}$$

Ecuatia (3.5) este un estimator care produce o noua estimare  $\bar{x}_{k+1}$  a solutiei  $x^*$ . Estimatorul are proprietatea de "convergenta de gradul II". Astfel, noua estimare  $\bar{x}_{k+1}$  trebuie sa fie mai apropiata de  $x^*$  decat este  $x_k$ . Bazandu-ne pe noua estimare ( $x_{k+1} = \bar{x}_{k+1}$ ), punem  $x_{k+1}$  in estimatorul (3.5) pentru a obtine noua estimare  $\bar{x}_{k+2}$ . Iterand procesul de localizare bazat pe estimarile anterioare, solutia  $x^*$  poate fi eventual abordata.

Pentru a fi aplicabila seriilor de timp (fara a sti ecuatiile sistemului), matricea Jacobiana  $D$  trebuie extrasa dintr-un set de date. Pentru a construi matricea Jacobiana  $D$  din seria de timp  $x_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ), ne trebuie un set de perechi de inapoiere stranse pentru  $x^*$ . O pereche de inapoiere stransa poate fi extrasa dintr-o serie de timp tinand cont de urmatoarea conditie

$$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \gamma, \gamma > 0\tag{3.6}$$

Valoarea lui  $\gamma$  este de obicei stabilita destul de mica atata timp cat numarul de perechi de inapoiere cerute pot fi colectate din serii de timp respectand conditia (3.6).

Se constata astfel ca utilizand modelele OPI, dezvoltam o strategie bazata pe modele pentru a estima trendurile ciclice in variatii haotice. Metodologia studiata in acest capitol poate duce in mod incurajator la o gama larga de aplicatii, in particular, detectarea si estimarea ciclului cat timp un sistem dinamic experimenteaza haosul in cursul sau evolutiv.

In capitolul 4 "Modele de trend pentru estimarea ciclurilor economice" am prezentat doua modele pentru componentele de trend, modelul **Smoothed Random Walk (SRW)** și **Double Integrated Autoregressive (DIAR)** într-un cadru general al **Unobserved Component Model** folosit cu succes mai mulți ani. (vezi Ng și Young, 1990; Young, 1999; Pedregal, 2001). Trăsătura specială a acestor modele care le face atractive este dată de predicțiile explorative de tip neliniar. Acest lucru permite rezultate mai bune ale predicțiilor lângă punctele de inflexiune.

Abordarea profită de flexibilitatea și proprietățile exceptionale ale modelului **Dynamic Harmonic Regression (DHR)** într-un cadru **State Space**. Parametrii din model sunt estimari folosind aceeași procedura în Young (1999) pentru modelul **SRW**, în timp ce o combinatie de astfel de proceduri și o **Sequential Spectrum Decomposition** este folosită în modelul **DIAR**.

Dupa cum se stie există numeroase metode diferite de descompunere a unei serii de timp în componente neobservate "**Unobservable Components (UC)**". O forma generală unanim acceptată este:

$$y_t = T_t + C_t + S_t + f(u_t) + e_t\tag{4.1}$$

unde  $y_t$  este seria de timp studiată;  $T_t$  este componenta de trend sau frecvența scazută;  $C_t$  este componenta ciclică sau semi-ciclică (ex. ciclul economic) perioada diferită de orice altă dată sezonieră;  $S_t$  este o componentă sezoniera;  $f(u_t)$  conține influența variabilelor exogene; și  $e_t$  este o componentă "neregulată", de obicei definită din considerente analitice

ca o repartiție Gaussiană normală cu media zero și dispersia  $\sigma^2$ . Pentru a putea accepta punctele netaționare în seria de timp, diferitele componente ale modelului, inclusiv trendul, pot fi descrise stochastic, **Time Variable Parameters (TVP's)**, cu fiecare **TVP** definită ca o variabilă stochastică netaționară. În anumite ipoteze un sistem stochastic nelinier poate fi aproximat printr-un model **TVP** liniar.

Nu toate elementele ecuației (1) sunt necesare în fiecare aplicație. De exemplu, e destul de obișnuit ca descompunerea în trend, sezonier sau neregulat, să fie suficientă pentru un număr destul de mare de serii economice de timp lunar și semestriale. Câteodata elementele sunt reunite într-una nouă numită diferit, precum “trend ciclic”

O formulare generală adesea utilizată este **Generalized Random Walk (GRW)**. Modele mai puțin cunoscute dar foarte utile în practică sunt posibile, precum **Double Integrated Autoregressive trend**.

1. **GRW**: acest trend este reprezentarea stochastică cea mai simplă a trendului. Această formă este:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t-1} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_t \quad T_t = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t \quad (4.2)$$

Aici,  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sunt constante;  $T_t$  este trendul;  $x_{2t}$  este variabilă fixată secundară, (numită și “pantă”;  $\eta_1$  și  $\eta_2$  sunt de medie zero, necorelate serial cu diagonala matricei de covarianță  $Q$ ).

Acest model include, în cazuri speciale, **Random Walk (RW:  $\alpha = 1$ ;  $\beta = \gamma = 0$ ;  $\eta_{2t} = 0$ )**; **Smoothed Random Walk ( $0 < \alpha < 1$ ;  $\beta = \gamma = 1$ ;  $\eta_{1t} = 0$ )**; **Integrated Random Walk (IRW:  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ;  $\eta_{1t} = 0$ )**; **Local Linear Trend (LLT:  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ )**; și **Damped Trend ( $\alpha = \beta = 1$ ;  $0 < \gamma < 1$ )**. În cazul **IRW**,  $x_{1t}$  și  $x_{2t}$  pot fi interpretate ca variabile de nivel și pantă asociate cu variația trendului cu perturbația aleatoare adusă doar de ecuația  $x_{2t}$ .

Modelul **IRW** a fost folosit cu succes pentru o perioadă lungă de timp și este util în mod special pentru descrierea schimbărilor ample și fine din trend sau **TVP**; modelul **RW** asigură variații mai puțin fine; și **SRW** permite pentru o întreagă categorie de comportamente intermediare între **IRW** și **RW** extreme depinzând de valoarea parametrului  $\alpha$  ( $\alpha = 0$  pentru **RW** și  $\alpha = 1$  pentru **IRW**). Este de asemenea binecunoscut faptul că **LLT** este de obicei mai puțin fin decât **IRW**.

Funcțiile de prognoză ale acestor modele (**RW**, **IRW**, **SRW**, și **LLT**) sunt, oricum, destul de diferite, așa cum se observă în figura 1. Prognozele modelului **RW** sunt o linie orizontală stabilită la ultima observație înainte de originea estimației; **RW** (și **LLT**) extrapolează într-un mod liniar cu o pantă fixată la nivelul lui în originea estimației; **SRW** asigură din nou posibilități intermediare într-un mod nelinier.

Este remarcabil faptul că modelul **SRW** produce un fel de predicții care au aceeași tendință cu componentele efectiv studiate ale multor serii economice. Nu tind să crească într-un mod exponențial pentru o perioadă lungă de timp nici ca trenduri liniare.

Asta înseamnă că utilizarea trendului **SRW** va fi potrivită în prognoza termenilor pentru un număr mare de serii, sau cel puțin în cazuri apropiate de punctele de inflexiune. Dealtfel, estimația parametrilor  $\alpha$  poate fi considerată ca un mod formal de testare potrivit pentru modelul **IRW** contra **RW**.

2. **DIAR**: Când se dorește modelarea trendului **IRW** se presupune că a doua sa diferență ( $\eta_{2t}$  în ecuația (2)) este “zgomot alb”. Când acest lucru e adevărat pentru elementele teoretice, nu este la fel pentru cele estimate. Este destul de normal să găsim corelații în aceste reziduri în situații practice.

Acest lucru ridică o problemă interesantă care încearcă să folosească corelația și să construiască un model pentru variabila reziduală spre a îmbunătăți performanța predicției totale. Observarea corelării acestor valori reziduale trebuie privită cu atenție deoarece știm că algoritmul **FIS** induce aceea corelație, și chiar e posibil să demonstrăm teoretic că aceea structură de corelație depinde chiar de autocorelarea seriei de timp originale.

Oricum, dacă a doua diferență arată unele comportamente previzibile cu unele înțelesuri fizice (ex. legate de ciclurile comerciale) merită să încercăm să o prognozzăm.

O posibilitate directă și simplă este modelarea celei de-a doua diferențe a seriei ca un model **AR**, aceasta este:

$$T_t = T_{t-1} + D_{t-1}$$

$$D_t = D_{t-1} + x_{1t}$$

$$x_{1t} = \frac{\eta_{3t}}{1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p}$$

unde **B** este operator pentru deplasarea înapoi, precum  $B^l x_t = x_{t-l}$  și  $a_t$  și ecuația observației albe sunt zgomot alb necorelate serial. În forma **SS** modelul e descris de următoarele ecuații:

$$\begin{bmatrix} T \\ D \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_1 & -\phi_2 & -\phi_3 & \dots & -\phi_{p-1} & -\phi_p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ D \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_t$$

$$T_t = [1 \ 0 \ \dots \ 0]x_t, \quad \text{cu } x_t = [T \ D \ | \ x_{1t} \ x_{2t} \ \dots \ x_{pt}]^T$$

Modelul este atunci complet definit de varianța lui  $\eta_{3t}$  și coeficienții **AR** polinomial. Acesta e un model mult mai complex decât **GRW**, dar poate să asigure previziuni neliniare ale trendului, foarte folositoare în cazul situațiilor apropiate de punctele de inflexiune.

În capitolul 5 “Analiza econometrică a agregării în cazul modelelor de prognoză liniară la nivel macroeconomic” este tratată problema agregării în cazul în care scopul este prognozarea variabilelor agregate folosind macro sau micro-ecuații, adică modele de la nivel macro sau microeconomic.

Criteriul prognozelor Grunfeld-Griliches privind alegerea între ecuații agregate și dezagregate este generalizat pentru a permite observațiilor din prezent covarianțe între neconcordanțele micro-ecuațiilor și posibilitatea diferitelor restricții parametrice asupra ecuațiilor modelului dezagregat. Un nou test este propus din perspectiva ipotezei ‘agregării perfecte’ care testează validitatea agregării ori cu ajutorul egalității coeficienților sau prin stabilitatea în timp a compoziției factorilor de regresie în funcție de micro-unități.

Modelul de baza este cel al lui Grunfeld și Griliches. Vom presupune că cele  $n$  observații ale celor  $m$  micro-unități  $\{y_{it}, i = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, n\}$  sunt generate în concordanță cu următoarele ecuații liniare:  $y_{it} = \sum_{j=1}^k \beta_{ij} x_{i,jt} + u_{it}$  pentru  $(i = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, n)$  sau, cu notațiile de matrice (Kloek, 1961),

$$H_d : y_i = X_i \beta_i + u_i \text{ pentru } (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.1)$$

$\begin{matrix} n \times 1 & n \times k & k \times 1 & n \times 1 \end{matrix}$

**Observatie:** Aici observațiile ale micro-unităților pot fi presupuse anumite indicatori de comportament.

În enunțul de mai sus se presupune că dispersiile în cadrul variabilelor dependente ale tuturor micro-unităților pot fi explicate prin mijloace de combinare liniară a aceluiași set de  $k$  variabile explicative. Această presupunere va fi explicitată în următoarea secțiune.

Scriind (5.1) ca un sistem de ecuații independente (SURE), conform lui Zellner, vom avea:

$$y = X\beta + u \quad (5.2)$$

unde  $y = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m)'$ ,  $\beta = (\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_m)'$ ,  $u = (u'_1, u'_2, \dots, u'_m)'$ , iar  $X$  este o matrice bloc-diagonală  $mn \times mk$  de grad coloană întreagă, cu matricea  $X_i$  fiind al  $i$ -lea bloc. Putem face, de asemenea, următoarea presupunere:

**Ipoteză:** Vectorul perturbator  $u$ ,  $mn \times 1$ , este distribuit independent de  $X$ , de medie zero și dispersie matricea  $\Omega = \Sigma \otimes I_n$ , unde  $\Sigma = (\sigma_{ij})$ , iar  $I_n$  este matricea unitate de ordin  $n$ .

Problema agregării poate apărea atunci când un cercetător interesat de comportamentul macro-variabilei  $y_a = \sum_{i=1}^m y_i$  ia în considerare macro-ecuația următoare:

$$H_a = \underset{n \times 1}{y_a} \underset{k \times 1}{b} + \underset{n \times 1}{u_a} \quad (5.3)$$

unde  $X_a = \sum_{i=1}^m X_i$ , în loc de  $m$  micro-ecuații în (5.1). Conform lui Grunfeld și Griliches vom afla dacă vom folosi macro-ecuațiile (5.3) sau micro-ecuațiile (5.1) pentru a prognoza  $y_a$ .

În ceea ce privește criteriul alegerii, rezultatele empirice arată că, pentru economie ca un întreg, modelul dezagregat se potrivește mai bine decât enunțurile agregate, în timp ce reciproca este adevărată pentru industriile de manufactură luate ca un întreg. Această potrivire, un pic mai bună pentru modelul agregat în ceea ce privește industriile manufacturiere nu ar trebui, totuși, să însemne că nu sunt probleme privind agregarea la acest nivel.