

A mathematical estimate within economic discounting computations¹

O estimare matematică în calculele de actualizare economice

Camelia Elena CIOLAC, Ph.D. Student
The Bucharest Academy of Economic Studies, Romania
e-mail: ciolac_c@yahoo.co.uk

Abstract

The paper aims to evaluate the opportunity of using mathematic estimation models within economic discounting computation. Several approximation models from the numerical methods theory will be considered in order to determine the evolution trend for investment projects' economic indicators. The paper has a rather theoretical framework and aims to identify new ways of improving existing techniques.

Keywords: update, discount rate, numerical methods, interpolation

Rezumat

Lucrarea isi propune sa studieze oportunitatea estimărilor matematice in cadrul calculelor de actualizare economice. Se vor considera diverse modele de aproximare din teoria metodelor numerice pentru determinarea trendului indicatorilor economici ai proiectelor de investiții. Articolul are un caracter teoretic si isi propune sa identifice modalități de îmbunătățire ale tehnicilor utilizate in prezent.

Cuvinte-cheie: actualizare, factor de scontare, metode numerice, interpolare

JEL Classification: H43, C02

Introducere

Tehnicile utilizate in prezent pentru calculul valorii indicatorilor economici ai proiectelor de investiții intr-un moment oarecare de timp t situat între momentul luării deciziei t_0 și momentul scoaterii din funcțiune a capitalului fix t_n presupun considerarea poziției pe axa timpului a lui t in intervalul $[t_0, t_n]$. Metodologia expusa in (Vasilescu et al. 2000) reprezintă un instrument eficient de identificare a valorii indicatorilor economici ai proiectului, considerând relativitatea elementelor de „trecut” și „viitor” raportate la momentul de timp t in care se dorește analiza.

Metodologia utilizata de practicieni considera calculul valorii actualizate a indicatorilor economici in cinci puncte de pe axa timpului, din care frecvent trei prezintă o

importanta deosebita, așa cum este prezentat in (Vasilescu et al. 2000).

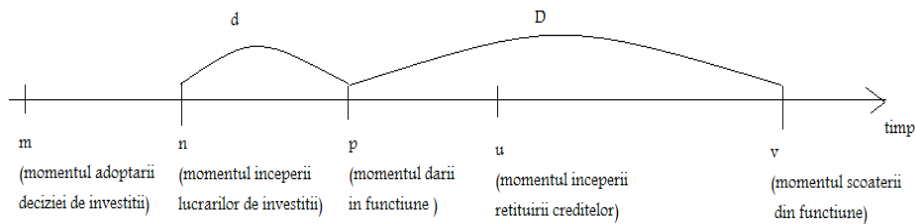


Figura 1. Principalele momente de calcul a valorii actualizate a indicatorilor economici ai proiectului de investiții

Pentru momentul de timp t , valorile investițiilor și profitului actualizate în t sunt:

$$I_t = \begin{cases} \sum_{0 < h < (n-1)+d} I_h * 1/(1+a)^h & , \text{daca } m < t < n \\ \sum_{0 < h < n-1} I_h * (1+a)^h + \sum_{n-1 < h < d} I_h * 1/(1+a)^h & , \text{daca } n < t < p \\ \sum_{t < h < d+t-1} I_h * (1+a)^h & , \text{daca } p < t < v \end{cases}$$

$$P_t = \begin{cases} \sum_{0 < h < (n-1)+d+D} I_h * 1/(1+a)^h & , \text{daca } m < t < n \\ \sum_{0 < h < t-p-1} I_h * (1+a)^h + \sum_{1 < h < D-(t-p)} I_h * 1/(1+a)^h & , \text{daca } p < t < v \\ \sum_{0 < h < t-1} I_h * (1+a)^h & , \text{daca } v = t \end{cases}$$

unde d = durata de execuție a investiției, D = durata de funcționare eficientă a obiectivului de investiții, I_h investiția anuală și Ph profitul anual constant.

Un aspect de complexitate în prezenta metodologie îl reprezintă cunoașterea a priori a duratei de funcționare eficientă a viitorului obiectiv de investiții D .

Utilizăm formulele de actualizare propuse în (Vasilescu et al. 2000) în cele cinci puncte de referință de pe axa timpului, considerate relevante de autori. Obținem puncte în reperul cartezian XOY cu coordonatele din tabelul 1, pentru spațiul investițiilor anuale totale.

Formule de calcul ale investiției și profitului actualizate în cele cinci momente (conform Vasilescu et al., 2000)

Tabelul 1

Moment	I_t	P_t
m	$\sum_{n-m+1 < h < (n-m)+d} I_h * 1/(1+a)^h$	$\sum_{1 < h < (n-m)+d+D} Ph * 1/(1+a)^h$
n	$\sum_{1 < h < d} I_h * 1/(1+a)^h$	$\sum_{1 < h < d+D} Ph * 1/(1+a)^h$
p	$\sum_{0 < h < d-1} I_h * (1+a)^h$	$\sum_{1 < h < D} Ph * 1/(1+a)^h$
u	$\sum_{u-p < h < (u-p)+d-1} I_h * (1+a)^h$	$\sum_{0 < h < u-p-1} Ph * (1+a)^h + \sum_{1 < h < D-(u-p)} Ph * 1/(1+a)^h$
v	$\sum_{D < h < D+d-1} I_h * (1+a)^h$	$\sum_{0 < h < D-1} Ph * (1+a)^h$

Metode de interpolare

In continuare lucrarea încearcă sa evidențieze oportunitatea utilizării elementelor de metode numerice, in particular a interpolărilor, pentru a aproxima valoarea actualizata a indicatorilor investiții si profit la un moment oarecare de timp, cunoscând perechile de valori din tabelul 1.

In literatura de specialitate, interpolările sunt utilizate in tehnica scontării pentru a aproxima durata de recuperare a investiției. Astfel, conform (Covrig & Gheorghe), prin interpolare liniara intre valorile succesive de timp in care fluxul monetar actualizat isi schimba semnul , se poate deduce T, durata de recuperare a investiției.

O alta utilizare a interpolărilor in calculele de actualizare este propusa în (Curs de specializare in contabilitate) pentru a afla rata interna de rentabilitate (RIR) pornind de la „o rata de actualizare aleasa arbitrar pentru care se calculează VNA” si modificând-o succesiv pentru a obține doua valori VNA+ si VNA-, caracterizate prin doua rate de actualizare a_{min} si a_{max} care diferă prin cel mult 5 puncte procentuale.

Pentru a identifica rata de scontare potrivita pentru calculele de actualizare, James, Van Horne & Wachowicz (2005) propun o formula matematica bazata pe interpolare, in care intervin RIR si prețul curent al investiției.

In acest context, lucrarea prezenta încearcă sa ofere o noua modalitate de utilizare a metodelor numerice in calculele de actualizare, si anume in estimare indicatorilor economici ai proiectelor de investiții intr-un moment de timp oarecare t de pe axa timpului reprezentata in figura 1.

Interpolarea cu Polinomul Lagrange

Se considera formula polinomului Lagrange:

$$Ln(x) = \sum_{0 < i < n} y_i * \prod_{0 < j < n, j \neq i} (x - x_j) / (x_i - x_j) \quad (1)$$

Pentru n=5 si punctele din tabelul 1, formula (1) se scrie echivalent:

$$Ln(x) = \sum_{n-m+1 < h < (n-m)+d} I_h * 1/(1+a)^h * \frac{(x-n)(x-p)(x-u)(x-v)}{(m-n)(m-p)(m-u)(m-v)} + \sum_{1 < h < d} I_h * 1/(1+a)^h * \frac{(x-m)(x-p)(x-u)(x-v)}{(n-m)(n-p)(n-u)(n-v)} +$$

$$+ \sum_{0 < h < d-1} I_h * (1+a)^h * \frac{(x-m)(x-n)(x-u)(x-v)}{(p-m)(p-n)(p-u)(p-v)} + \sum_{u-p < h < (u-p)+d-1} I_h * (1+a)^h * \frac{(x-m)(x-n)(x-p)(x-v)}{(u-m)(u-n)(u-p)(u-v)} +$$

$$+ \sum_{D < h < D+d-1} I_h * (1+a)^h * \frac{(x-m)(x-n)(x-p)(x-u)}{(v-m)(v-n)(v-p)(v-u)}$$

Se obține un polinom de gradul 4 in x. Cum domeniul de definiție a lui x este [0,infinit] , x reprezentând o coordonata de timp , atunci derivata 1 $Ln'(x) > 0$ si derivata

a 2-a $\ln''(x) > 0$. Prin urmare, $\ln(x)$ este o funcție strict crescătoare. Din acest punct de vedere, $\ln(x)$ poate aproxima I_t , deoarece ambele grafice au panta pozitivă.

Eroarea care se comite când se aproximează valoarea actualizată a investiției în momentul t utilizând $\ln(t)$ este:

$$\varepsilon = \begin{cases} |\ln(t) - \sum_{0 < h < (n-t)+d} I_h * 1/(1+a)^h| & , \text{daca } m < t < n \\ |\ln(t) - \sum_{0 < h < n-t} I_h * (1+a)^h + \sum_{n-t < h < d} I_h * 1/(1+a)^h| & , \text{daca } n < t < p \\ |\ln(t) - \sum_{0 < h < d+t-1} I_h * (1+a)^h| & , \text{daca } m < t < n \end{cases}$$

Observație: interpolarea prin metoda Newton-Gregory nu poate fi aplicată întrucât nu este respectată ipoteza de abscise echidistante.

Interpolarea repetată Aitken-Neville

Metoda interpolării Aitken-Neville presupune obținerea iterativă a unui polinom care să aproximeze funcția. În prima etapă se obține o formulă de interpolare liniară, iar apoi se aplică repetat algoritmul și se generează polinoame de interpolare de grad superior.

Interpolarea liniară între 2 puncte (x_k, y_k) și (x_{k+m}, y_{k+m}) produce polinomul de gradul 1:

$$y = y(x) = \frac{y_k * (x - x_{k+m}) - y_{k+m} * (x - x_k)}{x_k - x_{k+m}}$$

Fiind date cele cinci valori ale funcției ce se dorește a fi aproximată prin polinomul de interpolare Aitken-Neville de grad 4, se parcurg etapele:

Etapa 1:

$$\begin{aligned} y_1^0(x) &= [I_m * (x-n) - I_n * (x-m)] / (m-n) & , \text{cu } y_1^0(m) = I_m, y_1^0(n) = I_n \\ y_1^1(x) &= [I_n * (x-p) - I_p * (x-n)] / (n-p) & , \text{cu } y_1^1(n) = I_n, y_1^1(p) = I_p \\ y_1^2(x) &= [I_p * (x-u) - I_u * (x-p)] / (p-u) & , \text{cu } y_1^2(p) = I_p, y_1^2(u) = I_u \\ y_1^3(x) &= [I_u * (x-v) - I_v * (x-u)] / (u-v) & , \text{cu } y_1^3(u) = I_u, y_1^3(v) = I_v \end{aligned}$$

Etapa 2:

$$\begin{aligned} y_2^0(x) &= [y_1^0(x) * (x-p) - y_1^1(x) * (x-m)] / (m-p) \\ & \text{cu } y_2^0(m) = I_m, y_2^0(n) = I_n, y_2^0(p) = I_p \\ y_2^1(x) &= [y_1^1(x) * (x-u) - y_1^2(x) * (x-n)] / (n-u) \\ & \text{cu } y_2^1(n) = I_n, y_2^1(p) = I_p, y_2^1(u) = I_u \\ y_2^2(x) &= [y_1^2(x) * (x-v) - y_1^3(x) * (x-p)] / (p-v) \\ & \text{cu } y_2^2(p) = I_p, y_2^2(u) = I_u, y_2^2(v) = I_v \end{aligned}$$

Etapa 3:

$$\begin{aligned} y_3^0(x) &= [y_2^0(x) * (x-u) - y_2^1(x) * (x-m)] / (m-u) \\ & \text{cu } y_3^0(m) = I_m, y_3^0(n) = I_n, y_3^0(p) = I_p, y_3^0(u) = I_u \\ y_3^1(x) &= [y_2^1(x) * (x-v) - y_2^2(x) * (x-n)] / (n-v) \\ & \text{cu } y_3^1(n) = I_n, y_3^1(p) = I_p, y_3^1(u) = I_u, y_3^1(v) = I_v \end{aligned}$$

Etapa 4:

$$y_4^0(x) = [y_3^0(x) * (x-v) - y_3^1(x) * (x-m)] / (m-v)$$

cu $y_4^0(m) = Im$, $y_4^0(n) = In$, $y_4^0(p) = Ip$, $y_4^0(u) = Iu$, $y_4^0(v) = Iv$

Pentru a compara rezultatele obținute prin metodele analizate se considera următorul studiu de caz.

Se considera o investiție de modernizare a infrastructurii IT a unei companii desfășurată pe parcursul a trei ani cu $I_1=5000$ euro , $I_2=3000$ euro si $I_3=2500$ euro. Elaborarea studiului de fezabilitate si a documentației proiectului se desfășoară pe parcursul unui an. Pentru finanțare se apelează la un credit ce se rambursează începând din al doilea an de funcționare a obiectivului. Durata de funcționare eficienta este evaluata la 6 ani, iar coeficientul de actualizare pentru domeniul investiției este evaluat la valoarea de 15%.

Utilizând calculele de actualizare, se obțin următoarele valori in euro:

Moment	m=0	n=1	p=4	u=5	v=10
Valoare It	7184	8263	12562.5	14449	29057.5

Fie $p < t < v$, $t=8 \Rightarrow I_8 = \sum_{t < h < d+t-1} I_h * (1+a)^h = \sum_{4 < h < 6} I_h * (1+a)^h = 21970.5$

Fie $p < t < v$, $t_2=9 \Rightarrow I_9 = \sum_{t < h < d+t-1} I_h * (1+a)^h = \sum_{5 < h < 7} I_h * (1+a)^h = 25266.5$

Prin metoda polinomului de interpolare Lagrange se obține:

$$Ln(x) = 35.92 * (x-1)(x-4)(x-5)(x-10) - 76.5 * x(x-4)(x-5)(x-10) + 174.47 * x(x-1)(x-5)(x-10) - 144.49 * x(x-1)(x-4)(x-10) + 10.76 * x(x-1)(x-4)(x-5)$$

$$Ln(8) = 21987.84$$

Se observa ca $Ln(8)$ aproximează cu o abatere de 17.34 ($e=0.7*10^{-3}$) valoarea I_8 calculata cu tehnica actualizării.

$$Ln(9) = 25286.4$$

Se observa ca $Ln(9)$ aproximează cu o abatere de 19.9 ($e=0.7*10^{-3}$) valoarea I_9 calculata cu tehnica actualizării.

Analog se poate aproxima valoarea actualizata a indicatorilor economici (investiție totala , profit) intr-un moment oarecare de timp t folosind metoda de interpolare repetata Aitken-Neville prezentata. In punctul $t=8$ se obține in studiul de caz enunțat $y_4^0(8) = 21993$, cu o abatere relativa de 10^{-3} față de rezultatul obținut prin aplicarea calculelor clasice de actualizare.

Concluzii

Calculele de actualizare in cele cinci puncte de referința sunt suficiente pentru a estima cu ajutorul metodelor de interpolare , valoarea actualizata in orice punct intermediar. Se îmbunătățește astfel timpul de calcul pentru aplicarea tehnicii actualizării pentru subdiviziuni ale anului : semestru, trimestru, decada.

Din punct de vedere al implementării software a algoritmilor, se disting următoarele rezultate:

Utilizarea tehnicilor actuale de discountare

->timp computational $O(n)$

Utilizarea interpolării cu polinomul Lagrange

-> erori relative sub $e=0.7 \cdot 10^{-3}$
-> timp computational $O(n)$

Utilizarea interpolării repetate Aitken-Neville

-> erori relative sub $e=10^{-3}$
-> timp computational $O(n \cdot n)$

Bibliografie

- Vasilescu, I., Romanu, I., Cicea, C. (2000). *Investiții*, Editura Economica, București
- Vasilescu, I. (2006). *Pregătirea, Evaluarea și Auditul Proiectelor*, Editura EficonPress, București
- Iorgulescu, A. (2001). *Metode numerice și programe Pasca*”, Editura ASE București
- Covrig, M., & Gheorghe, C.– *Management de proiect*, preluat pe 21.05.2009 de pe pagina web a Facultății de Inginerie Electrică , Universitatea Politehnică din București http://74.125.77.132/search?q=cache:VQIYhQZTWNEJ:amotion.pub.ro/oferta_educationala/download/cristina_gheorghe/MP_2009_Curs10.ppt+interpolare+calcule+discontare&cd=2&hl=ro&ct=clnk&gl=ro
- Curs de specializare în contabilitate „*Factorul timp în calculele de eficiența economică a proiectelor de investiții*”, preluat 20.05.2009 de pe pagina http://www.contabilizat.ro/file/cursuri_de_perfectionare/contabilitate_si_gestiune/Gestiunea%20investitiilor/cap6.pdf
- James, C., Van Horne, Wachowicz, J. M. (2005). *Fundamentals of financial management*, Editura Pearson Education

¹ Acest articol a fost elaborat ca parte a proiectului “Doctorat și doctoranzi în triunghiul educație-cercetare-inovare (DOC-ECI)”, proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013 și coordonat de Academia de Studii Economice din București.